Artículo
Revista digital Matemática, Educación e Internet (www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/). Vol. 10, N^o 2. Marzo 2010

Fracciones continuadas: Un recorrido histórico.

Edward Parra S.
edward.parra@ucr.ac.cr
Escuela de Matemática
Universidad de Costa Rica

Resumen

Se presenta un breve recorrido sobre los principales rasgos históricos detrás de las fracciones continuadas; su notación, definición, aplicaciones a la geometría y algunos ejemplos de éstas.

Palabras claves: Fracciones continuadas, Notación, Historia, Matemáticas, Geometría, Aplicaciones.

Abstract

This paper present a brief tour on the main historical features behind the continued fractions; its notation, definition, applications to geometry and some examples of these.

KeyWords: Continued fractions, Notation, History, Mathematics, Geometry, Applications.

1.1 Introducción.

Las fracciones continuadas son un tópico matemático relativamente sencillo. Su complejidad de comprensión, inicialmente, no excede a conocimientos más allá de la aritmética elemental.
Más aún, es un tema que juega un papel predominate en la teoría de números. Permite aproximar de manera eficiente a los números irracionales, además es un método con el cual se pueden resolver ecuaciones diofánticas, entre otras de sus aplicaciones.
El propósito de este artículo realizar un breve recorrido sobre las fracciones continuadas, su notación, algunas aplicaciones a la geometría. Además, se ejemplifica el uso de las fracciones continuadas en la resolución de ecuaciones lineales diofánticas, así como también se calculan algunas fracciones continuadas de raíces cuadradas.
Se enuncian algunos teoremas importantes sobre fracciones continuadas, además de la noción de convergentes; su definición y uso en el cálculo de aproximaciones numéricas.
Como parte del recorrido histórico, se muestran algunas de las fracciones continuadas más famosas y quienes las descubrieron. Así como también algunas curiosidades que involucran a dichas fracciones.

1.2 La teoría de las fracciones continuadas

1.2.1 Fracciones continuadas finitas e infinitas

Una expresión de la forma

$$2+\cfrac{1}{3+\cfrac{5}{4+\cfrac{7}{1+\cfrac{1}{2}}}}$$

es un ejemplo de una fracción continuada. Está fracción puede ser evaluada calculando y simplificando las siguientes expresiones en el orden considerado:

$$\begin{aligned}
1+\frac{1}{2} &= \frac{3}{2}\\
4+\cfrac{7}{1+\cfrac{1}{2}} &= 4+\frac{7}{\frac{3}{2}}=\frac{26}{3},\\
3+\cfrac{5}{4+\cfrac{7}{1+\cfrac{1}{2}}} &= 3+\frac{5}{\frac{26}{3}}=\frac{93}{26}\\
2+\cfrac{1}{3+\cfrac{5}{4+\cfrac{7}{1+\cfrac{1}{2}}}} &= 2+\frac{1}{\frac{93}{26}}=\frac{212}{93};
\end{aligned}$$

esto es,

$$\frac{212}{93}=2+\cfrac{1}{3+\cfrac{5}{4+\cfrac{7}{1+\cfrac{1}{2}}}}$$

Una fracción continuada es una expresión de la forma

$$a_1+\cfrac{b_1}{a_2+\cfrac{b_2}{a_3+\cdots\cfrac{}{\cdots+\cfrac{b_{n-2}}{a_{n-1}+\cfrac{b_{n-1}}{a_n}}}}} \tag{1.1}$$

En general, los a_i y b_i, pueden ser números reales o complejos. Sin embargo, si cada b_i es igual a 1 y cada a_i es un entero mayor que cero, para $i>1$, entonces la fracción continuada se dice **fracción**

continuada simple.

Los a_i en (1.1) se llaman los términos de la fracción continuada. Si el número de términos de una fracción continuada simple es finito, se dice que es una **fracción continuada simple finita**. Si el número de términos es infinito, se dice que es una **fracción continuada simple infinita**.

A continuación se enunciaran algunos teoremas importantes[1] que fueron demostrados por L. Euler en el siglo XVIII, con los cuales se puede asociar a todo número real una fracción continuada.

Teorema 1.1 *Todo número racional puede ser expresado como una fracción continuada simple finita.*

La representación de un número racional como una fracción continuada simple finita no es única, éste puede ser representado en exactamente dos formas; una representación tiene un número impar de términos y la otra representación, un número par de términos. Así, se tiene:

Teorema 1.2 *Toda fracción continuada simple finita representa un número racional.*

Otro teorema también importante es el análogo a fracciones continuadas infinitas.

Teorema 1.3 *Todo número irracional puede expresarse como una única fracción continuada infinita.*

Teorema 1.4 *Toda fracción continuada simple infinita representa un número irracional.*

De aquí, se puede entonces concluir,

Teorema 1.5 *Todo número real puede ser expresado por una fracción continuada.*

EJEMPLO 1.1 Expresar $\sqrt{8}$ como una fracción continuada simple

Como $2 < \sqrt{8} < 3$, entonces 2 es el mayor entero menor que $\sqrt{8}$. Así,

$$\sqrt{8} = 2 + (\sqrt{8} - 2) = 2 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{\sqrt{8} - 2}} = 2 + \cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{8} + 2}{4}}$$

$$2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{\sqrt{8} - 2}{4}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\sqrt{8} + 2}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + (\sqrt{8} - 2)}}$$

Observe que la expresión $\sqrt{8} - 2$ aparece otra vez. El desarrollo de $(\sqrt{8} - 2)$ como fracción continuada es otra vez:

$$\cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + (\sqrt{8} - 2)}}$$

[1]Las demostraciones de estos teoremas pueden ser consultados en [9] de la página 150 en adelante.

por lo tanto,

$$\sqrt{8} = [2;1,4,1,4,\ldots] = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}$$

Está representación en fracción continuada de $\sqrt{8}$ es un ejemplo de una fracción continuada simple infinita que es **periódica**.

1.2.2 Algoritmo para el cálculo de fracciones continuadas

Considere p_0 y p_1, dos números enteros tales que $p_0 > p_1$. Por el algoritmo de la división euclídea (véase [3]), tenemos que

$$p_k = p_{k+1}q_k + p_{k+2} \text{ con } 0 \leq p_{k+1} < p_k; \;\; k = \{0,1,\ldots\}, \;\; q_k \in \mathbb{N}$$

Luego,

$$\frac{p_k}{p_{k+1}} = q_k + \cfrac{1}{\cfrac{p_{k+1}}{p_{k+2}}},$$

si se continúa con esta recursión, tenemos que:

$$q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cdots}}$$

EJEMPLO 1.2 Calcular la fracción continuada de $\dfrac{10463}{43200}$.

Utilizando el algoritmo de la división euclídea, tenemos

$$\begin{aligned}
43200 &= 4 \cdot 10463 + 1348 \\
10463 &= 7 \cdot 1348 + 1027 \\
1348 &= 1 \cdot 1027 + 321 \\
1027 &= 3 \cdot 321 + 64 \\
321 &= 5 \cdot 64 + 1 \\
64 &= 64 \cdot 1
\end{aligned}$$

De aquí se concluye entonces,

$$\frac{10463}{43200} = \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{64}}}}}}$$

1.2.3 Convergentes

Una de las razones por las cuales las fracciones continuadas son importantes es que ellas pueden ser utilizadas para obtener aproximaciones numéricas de números irracionales (véase [7]).
Las fracciones continuadas simples finitas

$$\begin{aligned}
c_1 &= [a_1] = a_1,\\
c_2 &= [a_1; a_2] = a_1 + \frac{1}{a_2}\\
c_3 &= [a_1; a_2, a_3] = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3}}\\
&\vdots\\
c_n &= [a_1; a_2, a_3, \ldots, a_k] = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots \cfrac{}{\ddots + \cfrac{1}{a_k}}}}
\end{aligned}$$

Los c_k se dicen los **convergentes**[2] o reducidos de la fracción continuada $[a_1; a_2, \ldots]$.

EJEMPLO 1.3 Determinar los convergentes de la fracción continuada simple finita dada por $[1; 3, 4, 2, 3]$.

$$\begin{aligned}
c_1 &= [1] = 1,\\
c_2 &= [1; 3] = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}\\
c_3 &= [1; 3, 4] = 1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4}} = \frac{17}{13}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_4 &= [1; 3, 4, 2] = 1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2}}} = \frac{38}{29}\\
c_5 &= [1; 3, 4, 2, 3] = 1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3}}}} = \frac{131}{100}
\end{aligned}$$

Nótese que el valor del convergente c_5 es igual al valor de la fracción continuada simple, que representa en general, el último convergente de la fracción continuada simple finita es siempre igual al valor del racional representado por esa fracción continuada.

[2]El primer matemático que investigó el método para calcular los convergentes fue Daniel Schwenter (1585-1636).

Ahora se mostrará una fórmula para evaluar más rápidamente los convergentes de una fracción continuada.

Sea c_n el $n-$ésimo convergente. Sea r_n y s_n el numerador y denominador, respectivamente de C_n.

$$c_1 = a_1; \quad \text{aquí, } r_1 = a_1 \text{ y } s_1 = 1$$

$$c_2 = a_1 + \frac{1}{a_2} = \frac{a_1a_2+1}{a_2} \quad \text{donde } r_2 = a_1a_2+1 \text{ y } s_2 = a_2$$

$$c_3 = \frac{a_3(a_1a_2+1)+a_1}{a_3a_2+1}$$

$$\text{Note que:} \quad a_1a_2+1+a_1 = r_2 \quad a_1 = r_1 \quad a_2 = s_2 \quad 1 = s_1$$

Sustituyendo, se tiene que

$$c_3 = \frac{a_3r_2+r_1}{a_3s_2+s_1} \quad \text{dado que} \quad \begin{array}{l} r_3 = a_3r_2+r_1 \\ s_3 = a_3s_2+s_1 \end{array}$$

De este modo, se puede ver que

$$c_n = \frac{r_n}{s_n} = \frac{a_nr_{n-1}+r_{n-2}}{a_ns_{n-1}+s_{n-2}}$$

Para que la fórmula anterior sea válida $n = 1, 2, \ldots$, considere aquí, las siguientes definiciones:

$$r_{-1} = 0, \quad s_{-1} = 1, \quad r_0 = 1 \quad \text{y} \quad s_0 = 0$$

Así, por ejemplo, los convergentes de $\frac{384}{157}$

$$\frac{384}{157} = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{2}}}}.$$

Los primeros 5 convergentes de $\frac{384}{157}$ son

n	-1	0	1	2	3	4	5
a_n			2	2	4	8	2
r_n	0	1	2	5	22	181	384
s_n	1	0	1	2	9	74	157
C_n	0	$-$	$\frac{2}{1}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{22}{9}$	$\frac{181}{74}$	$\frac{384}{157}$

1.3 Historia de las fracciones continuadas

1.3.1 Breve Reseña histórica

- Euclides (*c.* 300 a.C.) en su libro **Elementos** en el algoritmo para sacar el máximo común divisor genera fracciones continuadas.

- En 1579, Rafael Bombelli (1526-1572), en su libro *L 'Algebra Opera*, asocia las fracciones continuadas con su método de extracción de raíces cuadradas.

- En 1613 Pietro Cataldi (1548-1626), en su libro *"Trattato del modo brevissimo di trovare la radica quadra delli numeri, et regole da approssimarsi di continuo al vero nelle radice de numeri non quadrati, con le cause et inuentioni loro, et anco il modo di pigliarne la radica cuba, applicando il tutto alle operationi militari et altro"* utiliza la primera notación para las fracciones continuadas.

- En 1695, John Wallis (1616-1703), en *Opera Mathematica*, introduce el término de **fracción continuada**.

- En 1780, Joseph Louis Lagrange (1736-1813) da la solución a la ecuación de Pell[3] (véase [6]) usando fracciones continuadas, similar a las usadas por Bombelli.

- En 1748, Leonhard Euler (1707-1783), en *Introductio in analysin infinitorium*, volumen I, capítulo 18, prueba la equivalencia entre las fracciones continuadas y las series infinitas generalizadas.

- Fue Leonhard Euler, en el siglo XVIII que usó el nombre de *fractio continua* para las fracciones continuas. En alemán las fracciones continuas se denominan *kettenbrüche* (**fracciones cadena**).

- En 1813, Karl Friedrich Gauss (1777-1855), en su libro *Werke*, calcula una fracción continuada con valor complejo vía series hipergeométricas.

1.3.2 Sobre la notación de las fracciones continuadas

A continuación una pequeña reseña de la historia de la notación de las fracciones continuadas (véase [3]).

La notación para fracciones continuadas usada en la actualidad, fue introducida por Alfred Pringsheim (1850-1941) en 1898, esto es,

$$b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \ddots}}$$

pero previamente se usaron otras.

El matemático italiano Pietro Antonio Cataldi, en 1613 usaba la notación

$$4 \cdot \& \frac{2}{8.} \& \frac{2}{8.},$$

donde los puntos significa que la siguiente fracción es una fracción del denominador.

[3]En honor a John Pell (1611-1685)

Esto es, según la notación actual

$$4\cdot \&\frac{2}{8.}\&\frac{2}{8.}\ldots = 4+\cfrac{2}{8+\cfrac{2}{8+\ddots}}$$

Carl Friedrich Gauss en su libro *Disquisitiones arithmeticæ* publicado en 1801 usaba la notación

$$\begin{aligned} A_0 &= [b_0] = b_0, \\ A_1 &= [b_0; b_1] = b_1 A_0 + 1 \\ A_2 &= [b; b_1, b_2] = b_2 A_1 + A_0 \end{aligned}$$

Konrad Knopp, en el libro **Theory and Application of Infinite Series** de 1944, utiliza la siguiente notación para la representación de las fracciones continuadas infinitas (véase [5], pág. 105.)

$$b_0 + \mathop{K}_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{b_n}$$

Maritz Abraham Stern(1807-1894), designó las fracciones continuadas finitas por

$$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \cdots$$

En lo que sigue de este trabajo vamos a utilizar como notación de las fracciones continuadas, tanto la de Prisgsteim como la de Stern.

1.4 Aplicaciones

1.4.1 Cálculo de fracciones continuadas de raíces cuadradas

Rafael Bombelli, un ingeniero y arquitecto, que nació en Bologna, Italia en 1526, y murió en 1572, fundador de los números imaginarios, da un algoritmo para calcular las raíces cuadradas, este es: Considere

$$\sqrt{A} = \sqrt{a^2+r} = a + x$$

ó,

$$a^2 + r = a^2 + 2ax + x^2$$

ó

$$r = 2ax + x^2$$

Si al realizar la primera aproximación no se obtiene x^2, entonces considere

$$r = 2ax$$

y

$$\sqrt{A} = a + \frac{r}{2a}$$

Pero $x = \dfrac{r}{2a}$ ó $x^2 = \dfrac{rx}{2a}$. Así,

$$r = 2ax + \frac{rx}{2a} = \left(2a + \frac{r}{2a}\right) x$$

Usando esta nueva aproximación de x, se obtiene

$$\sqrt{A} = a + \frac{r|}{|2a} + \frac{r|}{|2a}.$$

Este proceso se puede hacer indefinidamente, obteniendo la fracción continuada infinita

$$\sqrt{A} = a + \frac{r|}{|2a} + \frac{r|}{|2a} + \cdots$$

Otro modo de explicar como Bombelli podría haber obtenido ese método es escribiendo

$$A - a^2 = (\sqrt{A} + a)(\sqrt{A} - a) = r$$

Así,

$$\sqrt{A} = a + \frac{r}{a + \sqrt{A}}$$

Reemplazando $\sqrt{A}$ por su expresión repetidamente en el denominador se llega a la fracción continuada.

EJEMPLO 1.4 Calcule una fracción continuada para $\sqrt{2}$

Considere

$$(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1) = 1 \iff \sqrt{2} - 1 = \frac{1}{\sqrt{2} + 1} \iff \sqrt{2} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2} + 1}$$

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{1 + 1 + \cfrac{1}{\sqrt{2} + 1}}$$

Luego,

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\sqrt{2} + 1}}$$

1.4.2 Resolución de ecuaciones diofánticas lineales mediante fracciones continuadas

Las fracciones continuadas simples permiten encontrar las soluciones particulares de una ecuación diofántica lineal.

EJEMPLO 1.5 Resolver la siguiente ecuación $124x - 72y = 16$.

Divida primero por el $\text{mcd}(124, 72) = 4$ ambos lados de la ecuación, notando que 4 divide a 16 y por lo tanto, la ecuación diofántica tiene soluciones enteras. Ahora, hay que resolver

$$31x - 18y = 4$$

Separe la parte entera de la fracción $\dfrac{31}{18}$

$$\frac{31}{18} = 1 + \frac{13}{18}$$

luego, cambíe $\dfrac{13}{18}$, por otra equivalente $1 + \dfrac{1}{\frac{18}{13}}$, obteniendo entonces:

$$\frac{31}{18} = 1 + \frac{1}{\frac{18}{13}}$$

Realizando nuevamente el mismo proceso con la fracción $\dfrac{18}{13}$:

$$\frac{18}{13} = 1 + \frac{5}{13} = 1 + \frac{1}{\frac{13}{5}}$$

Ahora, la fracción inicial tiene la forma

$$\frac{31}{18} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\frac{13}{5}}}$$

Realizando el mismo proceso con la fracción $\dfrac{13}{5}$:

$$\frac{13}{5} = 2 + \frac{3}{5} = 2 + \frac{1}{\frac{5}{3}}$$

se tiene entonces que:

$$\frac{31}{18} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\frac{3}{2}}}}}$$

Al continuar con el proceso, se llega a que

$$\frac{31}{18} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}}}$$

Suprimiendo el último término de esta fracción continuada, es decir, $\frac{1}{2}$, transformamos la fracción continuada en una fracción ordinaria y restando la fracción original $\frac{31}{18}$:

$$\frac{31}{18} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5}} = 1 + \frac{5}{7} = \frac{12}{7}$$

$$\frac{31}{18} - \frac{12}{7} = \frac{31 \cdot 7 - 18 \cdot 12}{18 \cdot 7} = \frac{1}{18 \cdot 7}$$

Reduciendo la expresión obtenida a un denominador común y suprimiendo este denominador, se obtiene:

$$31 \cdot 7 - 18 \cdot 12 = 1$$

Multiplicando por 4 a ambos lados de la igualdad, tenemos:

$$31 \cdot 28 - 18 \cdot 48 = 4$$

Finalmente

$$31x - 18y = 4$$

donde $x = 28$ y $y = 48$. Por lo tanto, todas las soluciones de la ecuación diofántica estarán dadas por

$$x = 28 - 18n, \qquad y = 48 - 31n, \qquad n \in \mathbb{Z}$$

1.4.3 Algunas fracciones continuadas

Se realizará un viaje a través de la historia, mostrando las fracciones continuadas más famosas y quienes las descubrieron (véase [7]). Así por ejemplo:

1. Bombelli, en 1572, con la notación moderna, descubrió que esencialmente

$$\sqrt{13} = 3 + \cfrac{4}{6 + \cfrac{4}{6 + \ddots}}$$

2. Cataldi, en 1613, expresó la fracción continuada de $\sqrt{18}$ como:

$$\sqrt{18} = 4 \cdot \& \frac{2}{8.} \& \frac{2}{8.} \& \frac{2}{8.} \ldots = 4 + \cfrac{2}{8 + \cfrac{2}{8 + \cfrac{2}{8 + \ddots}}}$$

3. Lord Brouncker, alrededor de 1658,

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{25}{2 + \cfrac{49}{2 + \cfrac{81}{2 + \ddots}}}}}$$

Está expansión está ligada históricamente con el producto infinito

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot 8\cdot 8}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 7\cdot 9}\cdots$$

dada por Wallis en 1655; ambos descubrieron importantes pasos en la historia de π

4. Leonhard Euler, en 1737 encontró la siguiente expresión, que lleva

$$e = 2.7182818284590\ldots = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

la base de los logaritmos naturales

$$\begin{aligned} e-1 &= 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\ddots}}}}} \\ &= [1;1,2,1,1,4,1,1,6,1,1,8\ldots] \end{aligned}$$

Así por ejemplo,

$$e-1 = 1,71828; \quad \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}} = 1,66667$$

lo cual brinda una buena aproximación a pesar de trabajar con una fracción continuada pequeña.

Luego,

$$\frac{e-1}{e+1} = \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{14+\ddots}}}}$$

$$\frac{e-1}{2} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{14+\ddots}}}}$$

Esta última expansión permite rápidamente aproximar a e. Por ejemplo, el sétimo convergente es aproximadamente:

$$e = \frac{1084483}{398959} = 2.71828182458\ldots,$$

el cual difiere del valor de e en el doceavo decimal.

5. Lambert, en 1766, mostró que

$$\frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \cfrac{1}{\cfrac{2}{x} + \cfrac{1}{\cfrac{6}{x} + \cfrac{1}{\cfrac{10}{x} + \cfrac{1}{\cfrac{14}{x} + \ddots}}}}$$

y además que

$$\tan(x) = \cfrac{1}{\cfrac{1}{x} - \cfrac{1}{\cfrac{3}{x} - \cfrac{1}{\cfrac{5}{x} - \cfrac{1}{\cfrac{7}{x} - \ddots}}}}$$

Lambert usó estas expresiones para concluir que

a. Si $x \in \mathbb{Q}$, $x \neq 0$, entonces e no es racional.

b. Si $x \in \mathbb{Q}$, $x \neq 0$, entonces $\tan(x)$ no es racional.

6. También Johann Heinrich Lambert (1728-1777), en 1770, mostró que

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + \ddots}}}}$$

$$= [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 84, 2, \ldots]$$

Si se calcula aquí el tercer convergente, se tiene

$$3 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15}}} = 3,14151$$

lo cual da 4 cifras de exactitud.

7.

$$\sqrt{a^2 + b} = a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \ddots}}}, \qquad a^2 + b > 0$$

8.
$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}}$$

9.
$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}$$

Los convergentes son

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5} \cdots,$$

ambos, numerador y denominador empiezan formando la sucesión de Fibonacci $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots)$.

10. Stern, en 1833, expresó como fracciones continuadas a $\frac{\pi}{2}$

$$\frac{\pi}{2} = 1 - \cfrac{1}{3 - \cfrac{2 \cdot 3}{1 - \cfrac{1 \cdot 2}{3 - \cfrac{4 \cdot 5}{1 - \cfrac{3 \cdot 4}{3 - \cfrac{6 \cdot 7}{1 - \cfrac{5 \cdot 6}{3 - \ddots}}}}}}}$$

11.
$$\sin(x) = \cfrac{x}{1 + \cfrac{x^2}{(2 \cdot 3 - x^2) + \cfrac{2 \cdot 3x^2}{(4 \cdot 5 - x^2) + \cfrac{4 \cdot 5x^2}{(6 \cdot 7 - x^2) + \ddots}}}}$$

Calculando los primeros 2 términos de la serie de potencias de la función $\sin x$. Esto es:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \cdots$$

Luego, el convergente de orden 2 de la función $\sin x$ es

$$\cfrac{x}{1 + \cfrac{x^2}{6 - x^2}} = x - \frac{x^3}{6}$$

12. Lambert, en 1770

$$\tan(x) = \cfrac{x}{1 - \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \cfrac{x^2}{7 - \ddots}}}}$$

13. Gauss, en 1812

$$\tanh(x) = \cfrac{x}{1 + \cfrac{x^2}{3 + \cfrac{x^2}{5 + \ddots}}}$$

14. Lambert en 1770 y Lagrange en 1776

$$\arctan(x) = \cfrac{x}{1 + \cfrac{x^2}{3 + \cfrac{4x^2}{5 + \cfrac{9x^2}{7 + \cfrac{16x^2}{9 + \ddots}}}}}, \qquad |x| < 1$$

15. Lambert en 1770 y Lagrange en 1776

$$\log(1 + x) = \cfrac{x}{1 + \cfrac{1^2 x}{2 + \cfrac{1^2 x}{3 + \cfrac{2^2 x}{4 + \cfrac{2^2 x}{5 + \cfrac{3^2 x}{6 + \cfrac{3^2 x}{7 + \ddots}}}}}}}, \qquad |x| < 1$$

16. Lagrange en 1813

$$\log\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right) = \cfrac{2x}{1 - \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{4x^2}{5 - \cfrac{9x^2}{7 - \cfrac{16x^2}{9 - \ddots}}}}}, \qquad |x| < 1$$

17. Lagrange en 1776

$$(1+x)^k = \cfrac{1}{1 - \cfrac{kx}{1 + \cfrac{\frac{1\cdot(1+k)}{1\cdot 2}x}{1 + \cfrac{\frac{1\cdot(1-k)}{2\cdot 3}x}{1 + \cfrac{\frac{2(2+k)}{3\cdot 4}x}{1 + \cfrac{\frac{2(2-k)}{4\cdot 5}x}{1 + \cfrac{\frac{3(3+k)}{5\cdot 6}x}{1 + \ddots}}}}}}}, \qquad |x| < 1$$

18. Laplace, en 1805 y Legendre en 1826, descubrieron la fracción continuada de la integral de probabilidad, usada en la **Teoría de Probabilidad y Estadística.** Esto es,

$$\int_0^x e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \cfrac{\frac{1}{2}e^{-x^2}}{x + \cfrac{1}{2x + \cfrac{2}{x + \cfrac{3}{2x + \cfrac{4}{x + \ddots}}}}}, \quad x > 0.$$

Si se calcula mediante algún paquete computacional, se puede ver que

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx = 0,746824$$

Ahora, usando la expansión en fracciones continuada de $\int_0^x e^{-u^2} du$, con u variando entre 0 y 1. De aquí, se tiene

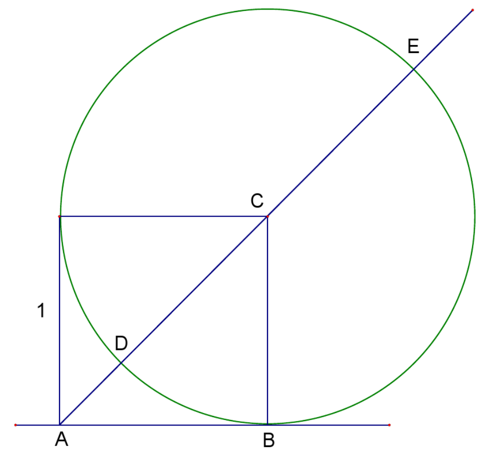
$$\int_0^1 e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \cfrac{\frac{1}{2}e^{-1^2}}{1 + \cfrac{1}{2\cdot 1 + \cfrac{2}{1 + \cfrac{3}{2\cdot 1}}}} = 0,615158$$

lo cual es una aproximación válida tomando en consideración que los paquetes computacionales aplican algoritmos muy complejos para el cálculo de esta integral y solo hemos calculado 3 convergentes.

1.4.4 Fracciones continuadas y geometría

Se presentará ahora la relación existente entre las fracciones continuadas y la geometría. Esto es, se mostrará que $\sqrt{2}$ es irracional usando las fracciones continuadas (véase [8]).

Dado un cuadrado con lado igual a 1 y un círculo indicado como en la figura. Se tiene



$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

luego, $AC = \sqrt{2}$. Observe que:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{\sqrt{2}}{1} \quad \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{AC}{BC} = \frac{CD + AD}{BC} =$$

$$= 1 + \frac{AD}{BC} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{BC}{AD}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{AD}{AB}}$$

Aquí se tiene que AD y AE son segmentos de una secante que pasa por el círculo con centro C. AB es tangente al arco con centro C. Luego, de las nociones de geometría plana, se sigue:

$$AB^2 = AE \cdot AD, \quad \text{ó} \quad \frac{AB}{AD} = \frac{AE}{AB};$$

$$AE = AD + DE = AD + 2BC, \quad \text{y} \quad BC = AB$$

$$\frac{BC}{AD} = \frac{AB}{AD} = \frac{AE}{AB} = \frac{AD + 2BC}{AB} = \frac{AD + 2AB}{AB} = 2 + \frac{AD}{AB}$$

Ahora bien, se tiene entonces

$$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{AD}{AB}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\cfrac{AB}{AD}}}$$

$$= 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{AD}{AB}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{AB}{AD}}}$$

Observe que ésta será una fracción continuada infinita, luego representará a un número irracional. Por lo tanto, se concluye que $\sqrt{2}$ es un número irracional.

1.4.5 Fracciones continuadas ascendentes

Otra curiosidad que brinda la teoría de las fracciones continuadas es la de las fracciones continuadas ascendentes.

Consideremos ahora, una variación de las fracciones continuadas, las fracciones continuadas ascendentes[4] que datan de Leonardo de Pisa[5]. Siguiendo a Fibonacci, se tiene:

$$\frac{e\ c\ a}{f\ d\ b} = \frac{a}{b}$$

[4]De *ascending continued fractions*. Para más información consúltese [3].

[5]Conocido como Fibonacci (*c.* 1170- *c.*1250). Fue un mercantil italiano que viajó principalmente a Egipto, Siria, Grecia y Silicia. En 1202 escribió *Liber Abaci*. Ahí, él introduce las fracciones continuadas ascendentes.

$$= \frac{adf + cf + e}{bdf} = \frac{a}{b} + \frac{c}{d}\frac{1}{b} + \frac{e}{f}\frac{1}{b}\frac{1}{d}$$

Luego,

$$\frac{e\ c\ a}{f\ d\ b} = \frac{a}{b} = \frac{a + \dfrac{c + \dfrac{e}{f}}{d}}{b}$$

Así por ejemplo, una fracción continuada ascendente para π es

$$\pi = 3 + \frac{1 + \dfrac{4 + \dfrac{1 + \dfrac{1 + \dfrac{5 + \cdots}{10}}{10}}{10}}{10}}{10}$$

1.4.6 El problema del calendario

Se sabe que un año, según el calendario Gregoriano, tiene

1 año= 365 días 5 horas 48 minutos 46 segundos.

Se tratará de expresar esa relación como una fracción continuada (véase [2], pág. 93.). Para esto, considere la siguiente proporción:

$$\frac{\text{5 horas 48 minutos 46 segundos}}{\text{1 día}} = \frac{\text{20926 segundos}}{\text{86400 segundos}} = \frac{10463}{43200}$$

Luego, utilizando el algoritmo de la división euclídea, se tiene

$$\begin{aligned}
43200 &= 4 \cdot 10463 + 1348 \\
10463 &= 7 \cdot 1348 + 1027 \\
1348 &= 1 \cdot 1027 + 321 \\
1027 &= 3 \cdot 321 + 64 \\
321 &= 5 \cdot 64 + 1 \\
64 &= 64 \cdot 1
\end{aligned}$$

De aquí, se puede concluir entonces que la fracción continuada que expresa 1 año, está dada por:

$$1 \text{ año} = [365; 4, 7, 1, 3, 5, 64];$$

esto es,

$$1 \text{ año} = 365 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{64}}}}}}$$

1.5 Observaciones

Al realizar el estudio sobre las fracciones continuadas, se puede ver que en la matemática a través de los tiempos, conceptos esencialmente elementales, muestran un interés entre la comunidad matemática. Así, se observa que en el desarrollo de la teoría de las fracciones continuadas, los más grandes matemáticos de la historia se han visto envueltos. Matematicos como Cataldi, Bombelli, Brounker, Euler, Lagrange, Lambert, Gauss, han sido partícipes en el desarrollo de esta teoría: la teoría de las fracciones continuadas.

Podemos ver, que la idea de la matemática acabada es errónea. Ya Euclides en 300 a.C. hacia uso de una manera implícita de las fracciones continuadas. Pasaron mas de 1800 años y volvieron a resurgir con todo su potencial las fracciones continuadas. Aquí, Cataldi, Bombelli, entre otros, siguieron desarrollándolas. Más adelante, Euler, Lagrange, Lambert, Gauss continuaron con este tópico.

Además, las fracciones continuadas jugaron un papel muy importante en la demostración de la trascendencia de π.Actualmente, la teoría de las fracciones continuadas se usa por ejemplo en **expansiones de Engel**[6]

Otros trabajos importantes sobre fracciones continuadas son: **Music and Ternary Continued Fractions** de J. M. Barbour en *The American Mathematical Monthly, Vol. 55, No. 9. (Nov., 1948), pp. 545-555.* **Corrections to Continued Fractions for the Incomplete Beta Function** de Leo A. Aroian en *The Annals of Mathematical Statistics, Vol. 30, No. 4. (Dec., 1959), p. 1265.* **On Some Recent Developments in the Theory and Application of Continued Fractions** de P. Wynn en *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics: Series B, Numerical Analysis, Vol. 1. (1964), pp. 177-197.* y el trabajo de Irvin, en [4].

Esto lo que refleja, es que las fracciones continuadas no es un tema muerto, es un tema de gran aplicabilidad a la matemática y sus aplicaciones. Sin lugar a dudas, la parte más importante de las fracciones continuadas es que, aún al ser muy sencillo, el gran potencial que posee a la hora de realizar aproximaciones.

Bibliografía

[1] Barrantes, H. *Introducción a la Teoría de Números*. EUNED. San José. 1998.

[2] Beskin, N. *Fracciones Maravillosas*. Editorial MIR. Moscú. 1985.

[3] Brezinski, C. *History of Continued Fractions and Padé Approximants*. Springer Verlag. U.S.A. 1991

[4] Irwin, M. *Geometry of Continued Fractions*. The American Mathematical Monthly, Vol. 96, No. 8. (Oct., 1989), pp. 696-703. 1989

[5] Knopp, K. *Theory and Applications of Infinite Series*. Blackie and Son Limited. Great Britain. 1944.

[6] Jones, B. *The Theory of Numbers*. Holt, Rinehart and Winston. New York. 1964.

[7] Moore, C. *An Introduction to Continued Fractions*. The National Council of Teachers of Mathematics. Washington. 1964.

[6] Kraaikamp y Wu en el 2004 observaron que toda expansión de Engel puede expresarse como una fracción continuada ascendente. Sobre expansiones de Engel, véase por ejemplo `http://en.wikipedia.org/wiki/Engel_expansion`.

[8] Olds, C.D. *Continued Fractions*. The L.W. Singer Company. Yale University. 1963.

[9] Pettofrezzo, A., Byrkit, D. *Introducción a la Teoría de Números*. Editorial Prentice-Hall Internacional. New Jersey. 1972.

[10] Stark, Harold. *An Introduction to Number Theory*. MIT Press. Cambridge, Massachusetts. 1998.

[11] Struik, Dirk J.. *A concise history of mathematics*. Dover Publications, Inc. Fourth Revised Edition. New York. 1987.